



Full paper – Poster

## Static Spherically Symmetric Solution of the Einstein Equations Sourced by a Perfect Fluid

Behnaz Fazlpour  
Islamic Azad University, Babol Branch, Iran  
Email: b.fazlpour@umz.ac.ir

**Abstract.** Physical properties of a new classes of solutions of the Einstein equations sourced by a perfect fluid with equation of state  $P = -(\rho)/5$  have been discussed. These geometries depend on up to three parameters and are static and spherically symmetric. They describe compact spaces with naked central singularities and not a black hole or a wormhole throat.

Keywords: Solutions of the Einstein equations, Spherically symmetric, Black hole, Perfect fluid

Talk link:

Wednesday 9th March 2022

### حل کروی و ایستای معادله اینشتین با چشمه یک سیال کامل

بهناز فضل پور<sup>۱</sup>

<sup>۱</sup> استادیار، دانشگاه آزاد اسلامی واحد بابل، بابل، b.fazlpour@umz.ac.ir

بیش از یک قرن است که ما نسبیت عام و حل شوارزشیلد آنرا که توصیف کننده یک شیئی ایزوله کروی است می شناسیم. در دهه های اخیر، حل های دیگر معادلات اینشتین کشف شده و خود نظریه نیز دچار چالش شده است.

جستجوی حل های تحلیلی یک نظریه فیزیکی، جنبه های فیزیکی آن نظریه را روشن نموده و دید فیزیکی ما را بهبود می بخشد. به دست آوردن حل های دقیق معادلات میدان یک نظریه غیر خطی معمولاً دشوار بوده و اغلب با ساده سازی مسئله یعنی با فرض برخی تقارن ها میسر می گردد. از سویی دیگر بررسی این جواب های متقارن به ما اجازه می دهد که بر روی برخی جنبه های فیزیکی متمرکز شویم. این موضوع دقیقاً در مورد حل شوارزشیلد اتفاق افتاده و منجر به کشف سیاهچاله ها و به طور غیر مستقیم (از طریق ادغام سیاهچاله ها) منجر به کشف امواج گرانشی شده است. حل های دارای تقارن کروی

#### چکیده

ویژگی های فیزیکی دسته جدیدی از جواب های معادلات اینشتین که در آنها یک سیال کامل با معادله حالت  $P = -\frac{\rho}{5}$  نقش چشمه را بازی می کند، مورد مطالعه و تحلیل قرار می گیرد. در این رده جوابها سه پارامتر آزاد وجود دارد و آنها توصیف کننده هندسه ای با تقارن کروی و ایستا هستند. مشخص خواهد شد که این جوابها یک فضای فشرده با یک تکینگی برهنه مرکزی را توصیف می نمایند و نشاندهنده یک سیاهچاله یا گلوگاه کرم چاله نیستند.

#### واژه های کلیدی

جواب های معادله اینشتین، تقارن کروی، سیاهچاله، سیال کامل

#### مقدمه

نسبیت عام می تواند توصیف کننده سیاهچاله ها، ستاره ها و احتمالا اشیا دیگر باشند.

اخیرا دو خانواده از جوابهای استتاتیک و متقارن کروی معادلات اینشتین در مرجع [۱] پیشنهاد شده است. ماده چشمه در این جوابها یک سیال ایده ال با معادله حالت  $\omega = \frac{P}{\rho} = -\frac{1}{5}$  است که در آن  $\rho$  و  $P$  به ترتیب چگالی انرژی و فشار سیال هستند. بررسی طبیعت فیزیکی این جوابها و دانستن این موضوع که آیا آنها می توانند توصیف کننده مناطق ستاره ای باشند یا خیر، می تواند حائز اهمیت باشد. البته توجه کنید که معادله حالت  $P = -\frac{\rho}{5}$  به وضوح غیر فیزیکی است. زیرا یافتن وضعیت های واقعی که با چنین سیالی توصیف می شوند، دشوار است. اما ستاره های انرژی تاریک گونه و حتی ستاره های انرژی فانوم گونه در مقالات متعددی مورد مطالعه قرار گرفته اند [۵-۲]. اگرچه انرژی تاریک که مسئول بسط شتابدار عالم کنونی است دارای معادله حالت  $P < -\frac{\rho}{3}$  است و ما اینجا با معادله حالت  $P = -\frac{\rho}{5}$  سرو کار داریم، اما باز هم این مدل می تواند به عنوان مدلی نمونه از اشیا فرضی که با فشار منفی شکل گرفته اند، باشد. علاوه بر این، از منظر ریاضی، یافتن جوابهای ساده معادلات اینشتین که توصیف کننده سیال های کامل باشند، نسبتا مشکل است. اگرچه بیش از یکصد جواب تحلیلی معادلات اینشتین با منبع سیال های کامل وجود دارد که برای توصیف ستاره های نسبیتی یا حداقل برای توصیف نواحی ستاره ای به کار می روند [۸-۶].

در این مقاله جواب به دست آمده در [۱] را امتحان می کنیم و ویژگیهای فیزیکی آنرا استخراج می نمائیم. اگرچه جواب های [۱] در مختصات بوچدال<sup>۱</sup> نوشته شده اند، از دیدگاه فیزیکی بهتر است آنها را بر اساس مختصات شوارزشیلد گونه بنویسیم. در ادامه از نشانگان متریک (+ + + -) استفاده می کنیم و داریم  $G \equiv 8\pi\kappa$  ثابت گرانث نیوتن است.

### معادلات اینشتین با چشمه سیال کامل $P = -\frac{\rho}{5}$

جوابهای پیشنهاد شده توسط [۱] خانواده ای از حل های شامل چهار پارامتر از معادله اینشتین بدون ثابت کیهانشناسی است. این معادله به صورت زیر است:

$$R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab}R = \kappa T_{ab} \quad (1)$$

که در آن  $R_{ab}$  تانسور ریچی،  $g_{ab}$  تانسور متریک و  $R$  اسکالر ریچی است. ماده چشمه یک سیال کامل با تانسور انرژی-تکانه به شکل زیر می باشد:

$$T_{ab} = (P + \rho)u_a u_b + P g_{ab} \quad (2)$$

که  $u^a$  چهار بردار سرعت سیال است و معادله حالت سیال نیز عبارتست از  $P = -\frac{\rho}{5}$ . جوابهای [۱] به لحاظ هندسی متقارن کروی و ایستا هستند. دو دسته جواب در [۱] به دست آمده و کلی ترین

حالت این جوابها که توسط چهار ثابت  $(C_0, C_1, C_2, C_3)$  پارامتریزه می شوند، به صورت زیر است:

$$ds^2 = -\frac{3C_1(C_0 + C_1 r)}{f(r)} dt^2 + \frac{f(r)}{3C_1(C_0 + C_1 r)} dr^2 + \frac{f^2(r)}{9C_1^2} d\Omega_{(2)}^2 \quad (3)$$

در متریک فوق  $C_1 \neq 0$  و  $C_0 + C_1 r \neq 0$  هستند و تابع  $f(r)$  عبارتست از:

$$f(r) = 3(C_1 C_2 + r) + C_3(C_0 + C_1 r)^3 \quad (4)$$

همچنین در المان طول (۳) داریم  $d\Omega_{(2)}^2 \equiv d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2$  چگالی انرژی و فشار متناظر با جواب (۳) عبارتند از:

$$\rho(r) = -5P(r) = \frac{-45\kappa C_1^3 C_3 (C_0 + C_1 r)^2}{f^2(r)} \quad (5)$$

که در آن شرط نامنفی بودن  $\rho(r)$  به قید زیر منجر می شود:

$$C_1 C_3 \leq 0 \quad (6)$$

توجه کنید که حالت خاص  $C_3 = 0$  متناظر با جواب خلأ می باشد. اما جواب متناظر با  $C_1 = 0$  با مساوی صفر قرار دادن  $C_1$  در (۳) به دست نیامده است بلکه به بحث مجزایی نیاز دارد.

این خانواده دوم جوابها با سه ثابت پارامتریزه شده و ما در اینجا بحث خود را محدود به تحلیل این دسته دوم می کنیم (این جواب به عنوان جواب خاص در مرجع [۱] نامگذاری شده است).

### جواب خاص $C_1 = 0$

دسته جوابهای سه پارامتری  $(C_0, C_2, C_3)$  با متریک زیر توصیف می شود:

$$ds^2 = -\frac{C_0^2}{g(r)} dt^2 + \frac{g(r)}{C_0^2} dr^2 + \frac{g^2(r)}{C_0^2} d\Omega_{(2)}^2 \quad (7)$$

که در آن  $C_0 \neq 0$  است و داریم:

$$g(r) = C_0(C_2 + C_3 r) - r^2 \quad (8)$$

$$\rho(r) = -5P(r) = \frac{5\kappa C_0^2}{g^2(r)}. \quad (9)$$

برای حفظ نشانگان متریک بایستی  $g(r) > 0$  باشد. در واقع چنانچه  $g(r)$  منفی شود ویژگی زمان گونه و فضا گونه مختصه های  $t$  و  $r$  همانند هندسه شوارزشیلد در افق  $r = 2m$ ، عوض می شود. ما المان خط (۷) را بر حسب شعاع مساحت<sup>۲</sup> بازنویسی می کنیم. برای اینکار با حل رابطه زیر

$$r^2 - C_0 C_3 r + (|C_0| R - C_0 C_2) = 0 \quad (10)$$

داریم:

$$r(R) = \frac{1}{2} \left( C_0 C_3 \pm \sqrt{C_0^2 C_3^2 + 4(C_0 C_2 - |C_0| R)} \right). \quad (11)$$

جمله زیر رادیکال در سمت راست بایستی نامنفی باشد تا  $r$  حقیقی باقی بماند. لذا داریم:

<sup>۲</sup> Areal radius

<sup>۱</sup> Buchdahl

نیز در مبدأ واگرا شده و لذا یک تکینگی فضا-زمانی برهنه<sup>۴</sup> در مبدأ داریم.

با وجود تقارن کروی، جرم مایسنر-شارپ-هرناندز<sup>۵</sup> به صورت زیر تعریف می شود:

$$1 - \frac{2M_{\text{MSH}}}{R} = \nabla^c R \nabla_c R = g^{RR} \quad (21)$$

لذا در مورد هندسه (۱۸) به دست می آوریم:

$$M_{\text{MSH}}(R) = \frac{1}{2}(5R - 4R_{\text{max}}) \quad (22)$$

که در ناحیه  $0 < R < 4R_{\text{max}}/5$  اطراف تکینگی منفی است. این موضوع عجیب نیست زیرا می دانیم جرم مایسنر-شارپ-هرناندز در نزدیکی تکینگی ها خوش رفتار نیست [۹-۱۰].

اجازه دهید مجدداً به بررسی بیشینه مقدار شعاع مساحت  $R_{\text{max}}$  بپردازیم. با وجود اینکه  $R_{\text{max}}$  ریشه معادله  $\nabla^c R \nabla_c R = 0$  است اما توصیف کننده یک افق نیست. برای درک این حقیقت، آموزنده است که رفتار ژئودزیکهای شعاعی صفر<sup>۶</sup> را بررسی کنیم. همخوانی های ورودی<sup>۷</sup> و خروجی ژئودزیکهای صفر شعاعی با مماسهای  $l_{(\pm)}^\mu = dx^\mu/d\lambda$  که  $\lambda$  پارامتر افین در امتداد این منحنی ها است، را در نظر بگیرید. شرط بهنجارش  $l_a^{(\pm)} l_{(\pm)}^a = 0$  به دست می دهد:

$$l_{(\pm)}^1 = \pm \frac{2}{R} \sqrt{(R_{\text{max}} - R)|C_0|} l_{(\pm)}^0 \quad (23)$$

از آنجا که یک بردار صفر را می توان با یک تابع باز مقیاس<sup>۸</sup> نمود، می توانیم  $l^0 = 1$  را انتخاب نموده و به نتیجه زیر برسیم:

$$l_{(\pm)}^\mu = \left(1, \pm \frac{2}{R} \sqrt{(R_{\text{max}} - R)|C_0|}, 0, 0\right) \quad (24)$$

دقت کنید که انتخاب  $l^0 = 1$  به معنی این است که مختصه زمانی  $t$  را به عنوان پارامتر افین در امتداد این ژئودزیکهای صفر در نظر گرفته ایم.

حال معادلات مرتبه اول زیر را به دست می آوریم:

$$\frac{dt}{d\lambda} = 1 \quad (25)$$

$$\frac{R}{\sqrt{R_{\text{max}} - R}} \frac{dR}{d\lambda} = \pm 2\sqrt{|C_0|} \quad (26)$$

با انتگرال گیری داریم:

$$t(\lambda) = \lambda - \lambda_0 \quad (27)$$

$$\sqrt{R_{\text{max}} - R}(R + 2R_{\text{max}}) = \mp 3\sqrt{|C_0|}(\lambda - \lambda_0) \quad (28)$$

که در آن  $\lambda_0$  یک ثابت انتگرال گیری است. از آنجا که

$$\frac{dR}{dt} = \frac{dR}{d\lambda} = \pm 2\sqrt{|C_0|} \frac{\sqrt{R_{\text{max}} - R}}{R} \quad (29)$$

$$0 \leq R < \frac{C_0^2 C_3^2 + 4C_0 C_2}{4|C_0|} \equiv R_{\text{max}} \quad (12)$$

که این رابطه محدوده شعاع مساحت را به دست می دهد. شعاع مساحت  $R$  از مقدار صفر در

$$r_1 = \frac{1}{2} \left( C_0 C_3 - \sqrt{C_0^2 C_3^2 + 4C_0 C_2} \right) \quad (13)$$

شروع می شود و تا مقدار بیشینه زیر افزایش می یابد:

$$R_{\text{max}} = R \left( \frac{C_0 C_3}{2} \right), \quad (14)$$

سپس شروع به کاهش می کند تا اینکه در

$$r_2 = \frac{1}{2} \left( C_0 C_3 + \sqrt{C_0^2 C_3^2 + 4C_0 C_2} \right) \quad (15)$$

دوباره صفر می شود. دو ناحیه مختصاتی  $C_0 C_3/2 \leq r \leq r_2$  و  $r_1 \leq r \leq C_0 C_3/2$  نواحی فیزیکی یکسانی را پوشش می دهند  $0 \leq R \leq R_{\text{max}}$ .

در ادامه ما خود را به ناحیه  $r_1 \leq r \leq C_0 C_3/2$  که در آن  $dr/dr > 0$  است یعنی ناحیه متناظر با علامت منفی در (۱۱) محدود می کنیم. داریم:

$$\frac{C_0 C_3 - 2r}{\mp \sqrt{C_0^2 C_3^2 + 4(C_0 C_2 - |C_0|R)}} \quad (16)$$

حال با جایگذاری عبارت

$$dr = \frac{|C_0|}{C_0 C_3 - 2r} dR \quad (17)$$

که دو دیفرانسیل را به یکدیگر مربوط می سازد و نیز استفاده از معادله (۱۶) المان خط (۷) به صورت زیر تبدیل می شود:

$$ds^2 = -\frac{|C_0|}{R} dt^2 + \frac{dR^2}{4\left(\frac{R_{\text{max}}}{R} - 1\right)} + R^2 d\Omega_{(2)}^2. \quad (18)$$

معادله  $\nabla^c R \nabla_c R = g^{RR} = 0$  مکان افق های ظاهری<sup>۳</sup> را مشخص می کند. اگر این معادله یک ریشه تنها داشته باشد، نشاندهنده افق ظاهری یک سیاهچاله یا یک سفید چاله است در حالیکه وجود ریشه دو گانه برای این معادله به وجود گلوگاه افق کرمچاله دلالت می کند.

در مورد متریک (۱۸) تنها یک ریشه  $R_{\text{max}}$  یافت می شود و لذا هیچ افق ظاهری برای  $R < R_{\text{max}}$  نداریم. معنی فیزیکی ریشه  $R_{\text{max}}$  را در ادامه جستجو خواهیم کرد.

چگالی انرژی

$$\rho(R) = \frac{5\kappa C_0^2}{g^2(r)} = \frac{5\kappa}{R^2} \quad (19)$$

و فشار  $P = -\rho/5$  که همواره غیر صفرند، در مبدأ  $R = 0$  که متناظر با  $r = r_1$  است، واگرا می شوند. همچنین اسکالر ریچی که به شکل زیر است:

$$R = -\kappa T = \kappa(\rho - 3P) = \frac{8\kappa}{5} \rho = \frac{8\kappa^2}{R^2} \quad (20)$$

<sup>۱</sup> Radial null geodesics  
<sup>۲</sup> Ingoing congruences  
<sup>۳</sup> Rescale

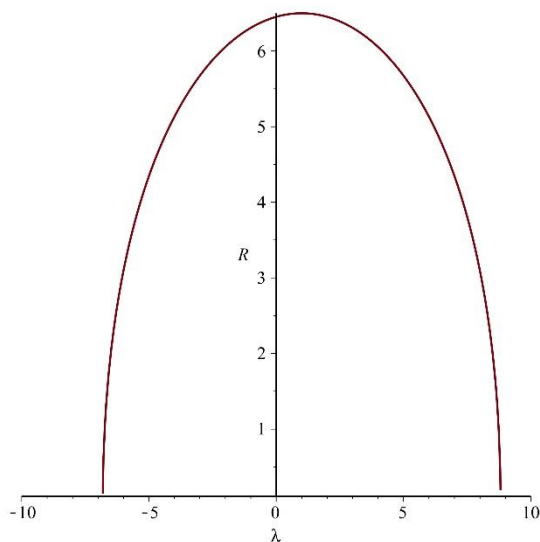
<sup>۴</sup> Apparent horizon  
<sup>۵</sup> Naked space-time singularity  
<sup>۶</sup> Misner-Sharp-Hernandez

شد. در نتیجه ذره ای که در آغاز در  $R_{\max}$  است، مستقل از انرژی اولیه اش، در آنجا باقی می ماند.

- از آنجا که  $R$  با مقدار  $R_{\max}$  محدود شده است، انرژی های ممکن از پایین کراندارند

$$E > \sqrt{\frac{|C_0|}{R_{\max}}} = \frac{2|C_0|}{\sqrt{C_0^2 C_3^2 + 4C_0 C_2}} \equiv E_{\min} \quad (34)$$

ذراتی با انرژی کمتر از کمینه آستانه  $E_{\min}$  حرکت نمی کنند.



### نتیجه گیری

در این مقاله، به مطالعه دسته جدیدی از جوابهای متقارن کروی و ایستای معادلات اینشتین پرداختیم که چشمه آنها یک سیال کامل با معادله حالت  $P = -\frac{\rho}{5}$  است [1].

اگرچه در مرجع [۱] دو دسته جواب پیشنهاد شده، ما در اینجا فقط به بررسی حالت خاص جوابها پرداختیم. این دسته جوابها توصیف کننده یک فضای فشرده با تکینگی برهنه مرکزی هستند. جواب های عمومی (۳) و (۵) همواره به ازای  $C_3 = 0$  به جواب شوارزشیلد تقلیل می یابند.

این حقیقت که هندسه، همراه با چگالی انرژی و فشار در  $R = 0$  تکینه هستند لزوماً به معنی نابودی این جوابها نیست. در واقع این موضوع که جوابهای دارای چشمه سیال معادلات اینشتین فقط نواحی محدودی از ستاره های نسبیتی را مدل سازی می کنند، کاملاً پذیرفته شده است [۶]. اینکه جوابهای [۱] یک فضای فشرده را توصیف می کنند می تواند بیانگر شباهت جوابها با مدل اپنهایمر-اسنایدر [۱۱] برای فروپاشی گرانشی به یک سیاهچاله باشد. اما در جوابهای [۱] بر خلاف مدل اپنهایمر-اسنایدر [۱۱] فشار سیال هیچگاه صفر نمی شود و لذا بهترین توصیفی که می توان برای این جوابها داشت این است که نواحی محدودی از درون ستاره ها را با آنها مدلسازی نمود.

که در آن علامت مثبت برای ژئودزیکهای شعاعی خروجی و منفی برای ورودی هاست.

در نزدیکی مبدأ  $R = 0$  داریم  $dR/dt \sim +\infty$  برای خروجی ها و  $dR/dt \sim -\infty$  برای ژئودزیکهای ورودی.

همچنین در  $dR/dt = 0$ ،  $R = R_{\max}$  است. ژئودزیکهای خروجی که از نزدیکی مبدأ شروع می شوند بسیار سریع هستند و همچنانکه به بیشینه شعاع ممکن  $R_{\max}$  می رسند، آهسته می شوند تا اینکه با سرعت صفر قابل دسترس اند (شکل ۱ را ملاحظه نمائید).

شکل ۱: شعاع مساحت  $R$  برحسب پارامتر افین  $\lambda$  در طول ژئودزیکهای شعاعی صفر به ازای مقادیر  $C_0 = C_2 = 2$ ،  $C_3 = 3$  و  $\lambda_0 = 1$ .

یک ژئودزیک صفر که دقیقاً در  $R_{\max}$  آغاز می شود دارای سرعت صفر است و همانجا باقی می ماند. ژئودزیکهای خروجی که در نزدیکی  $R_{\max}$  آغاز می شوند نیز همچنانکه به تکینگی برهنه در مبدأ نزدیک می شوند، شتاب می گیرند. در آنجا آنها دارای سرعت بی نهایت هستند  $dR/d\lambda \rightarrow -\infty$ .

همچنین می توان ژئودزیکهای زمان گونه شعاعی را با مماسهای  $u^c u_c = -1$  بهنجارش نمود. بهنجارش  $u^\mu = (u^0, u^1, 0, 0)$  نتیجه می دهد:

$$u^1 = \pm \frac{2}{\sqrt{R}} \sqrt{(R_{\max} - R) \left[ \frac{|C_0|(u^0)^2}{R} - 1 \right]} \quad (30)$$

که علامت مثبت برای ژئودزیکهای خروجی و علامت منفی برای ورودی هاست. بردار کیلینگ<sup>۹</sup> زمان گونه  $\xi^a = (\partial/\partial t)^a$  پایستگی انرژی بر واحد جرم یک ذره با انرژی  $E$  در امتداد این منحنی ها را تضمین می کند:

$$E = -g_{ab} \xi^a u^b = \frac{|C_0|u^0}{R} = \text{const.} \quad (31)$$

که در آن  $u^0 > 0$  است زیرا این منحنی ها در جهت آینده هستند چرا که  $E$  مثبت است. حال معادله (۳۰) به دست می دهد:

$$u^1 = \pm \frac{2}{\sqrt{R}} \sqrt{(R_{\max} - R) \left( \frac{E^2 R}{|C_0|} - 1 \right)} \quad (32)$$

که نتایج زیر را در بردارد:

- به ازای انرژی داده شده  $E$ ، حرکت شعاعی ممکن است اگر

$$R > R_{\min} \equiv \frac{|C_0|}{E^2} \quad (33)$$

در غیر اینصورت  $u^1$  مختلط خواهد شد. حرکت شعاعی در  $R_{\min}$  متوقف شده و ذره نمی تواند به مبدأ برسد و این موضوع با این واقعیت که بر اساس معادله (۳۱)، وقتی  $u^0 = ER/|C_0| \rightarrow 0$ ،  $R \rightarrow 0$  سازگار است.

- حرکت شعاعی در  $R_{\max}$  که  $u^1$  برای هر دو دسته ژئودزیکهای ورودی و خروجی صفر می شود، متوقف خواهد

- [7] M. S. R. Delgaty and K. Lake, "Physical acceptability of isolated, static, spherically symmetric, perfect fluid solutions of Einstein's equations," *Comput. Phys. Commun.* **115**, 395-415 (1998) [arXiv:gr-qc/9809013 [gr-qc]].
- [8] V. Faraoni, *Cosmological and Black Hole Apparent Horizons*, Lect. Notes Phys. **907** (Springer, New York, 2015)
- [9] V. Faraoni and A. Giusti, "Unsettling physics in the quantum-corrected Schwarzschild black hole," *Symmetry* **12**, 1264 (2020) [arXiv:2006.12577 [gr-qc]].
- [10] V. Faraoni, A. Giusti and T. F. Bean, "Asymptotic flatness and Hawking quasilocal mass," *Phys. Rev. D* **103**, no.4, 044026 (2021) [arXiv:2010.00069 [gr-qc]].
- [11] J. R. Oppenheimer and J. R. Snyder, "On continued gravitational contraction", *Phys. Rev.* **56**, 455 (1939).
- [1] Í. Semiz, "The general static spherical perfect fluid solution with EoS parameter  $w = -1/5$ ," [arXiv:2007.08166 [gr-qc]].
- [2] D. Horvat and A. Marunović, "Dark energy-like stars from nonminimally coupled scalar field," *Class. Quant. Grav.* **30**, 145006 (2013) [arXiv:1212.3781 [gr-qc]].
- [3] P. Bhar, "Dark energy stars in Tolman–Kuchowicz spacetime in the context of Einstein gravity", *Phys. Dark Univ.* **34**, 100879 (2021).
- [4] A. DeBenedictis, R. Garattini and F. S. N. Lobo, "Phantom stars and topology change," *Phys. Rev. D* **78**, 104003 (2008) [arXiv:0808.0839 [gr-qc]].
- [5] G. Chapline, "Dark energy stars," eConf **C041213**, 0205 (2004) [arXiv:astro-ph/0503200 [astro-ph]].
- [6] H. Stephani, D. Kramer, M. MacCallum, C. Hoenselaers, E. Herlt, *Exact Solutions of the Einstein Field Equations* (Cambridge University Press, Cambridge, 2003).